a) $y=\sqrt[3]{x(x-1)}$,

189. Odrediti oblast definisanosti funkcija:

a) $y=\sqrt{\left(e^{x-1}-x\right)(x-3)}$, b) $y=\sqrt{(2-x)(1+\ln x-x)}$.

190. Odrediti vrijednosti parametra a tako da funkcija:

a) $y=x+e^{a-x}$ ima najmanju vrijednost jednaku 4,

b) $y=e^{x-a}-x$ ima najmanju vrijednost jednaku -3.

191. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcija: a) $y=x+\sqrt{1-x}$, b) $y=x-\sqrt{2x+1}$.

192. Izračunati sume:

a) $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$,

b) $1^2+2^2x+3^2x^2+...+n^2x^{n-1}$,

c) $\cos x+3\cos 3x+5\cos 5x+...+(2n-1)\cos(2n-1)x$,

d) $\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+...+(2n-1)\sin(2n-1)x$,

e) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+...+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$,

f) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+...+n\cos nx$,

g) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+..+n\sin nx$.

2.14. Konveksnost i konkavnost funkcije. Prevojne tačke

Definicija 4. Funkciju $f(x)$ definisanu na intervalu (a,b) nazivamo konveksnom (konkavnom) na (a,b), ako se tačka njenog proizvoljnog luka nalazi ispod (iznad) odsječka koji spaja krajeve luka.

Napomnimo da postoji više definicija konveksnosti (konkavnosti) koje se ekvivalentne navedenoj definiciji.

Dovoljan uslov konveksnosti (konkavnosti). Neka funkcija $f(x)$ ima izvode prvog i drugog reda na intervalu (a,b). Ako je $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ za $x\in(a,b)$, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) na intervalu (a,b).

Definicija 5. Neka funkcija $f(x)$ ima izvod u nekoj okolini $O(x_0)$ tačke x_0. Ako pri prolasku kroz tačku x_0 grafik fukcije iz konveksnosti prelazi u konkavnost (ili iz konkavnosti u konveksnost), tada tačku $A(x_0, f(x_0))$ nazivamo tačkom prevoja ili infleksije grafika funkcije $f(x)$.

Scanned by TapScanner

- **Neophodan uslov postojanja prevojne tačke.** Ako je x_0 tačka prevoja grafika funkcije f(x), tada je drugi izvod u toj tački jednak nuli (tj. $f''(x_0)=0$) ili ne postoji.

Tačke u kojima je drugi izvod funkcije f(x) jednak nuli nazivamo kritičnim tačkama druge vrste.

- **Prvi dovoljan uslov postojanja prevojne tačke.** Neka funkcija f(x) ima prvi izvod u tački x_0 i drugi izvod u nekoj okolini tačke x_0 (izuzev možda u samoj tački x_0). Ako pri prolasku kroz tačku x_0 drugi izvod mijenja znak, tada je x_0 -prevojna tačka grafika funkcije f(x).
- **Drugi dovoljan uslov postojanja prevojne tačke.** Neka funkcija f(x) ima izvode prvog, drugog i trećeg reda u okolini $O(x_0)$ tačke x_0. Ako je $f''(x_0)=0$ i $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, tada je x_0 prevojna tačka grafika funkcije f(x).

Zadaci

193. Ispitati konveksnost i konkavnost i odrediti prevojne tačke (grafika) sljedećih funkcija:

a) $y=x^5+5x+5$, b) $y=x^4+4x^2$, c) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, d) $y=x^3\ln x+1$,

e) $y=\ln(1+x^2)$ f) $y=xe^{2x}+1$, g) $y=x-\sin x$, h) $y=(x+1)^4+e^x$,

i) $y=\dfrac{2x+1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x}$, j) $y=\dfrac{3x-2}{3}\ln\dfrac{x-1}{x}$.

194. Dokazati da prevojna tačka grafika funkcije ne može biti istovremeno i tačka ekstremuma te funkcije.

195. Dokazati da svaki polinom neparnog stepena n (n≥3) ima bar jednu prevojnu tačku.

196. Dokazati da grafik parnog polinoma (polinoma koji je parna funkcija) sa pozitivnim koeficijentima nema prevojnih tačaka, ali ima jedinstvenu tačku minimuma.

2.15. Razni zadaci

197. Data je funkcija $y=x^2-\left(a-\dfrac{2}{3}\right)x^3-ax+1$. Odrediti realan broj a tako da funkcija nema ekstremnih vrijednosti.

198. Data je funkcija $y=a(x-1)(x-3)+a^2-1$.

a) Naći ekstremnu vrijednost funkcije za a=2.
b) Odredi a tako da funkcija ima maksimum 5.

199. Data je funkcija $f(x)=x^3-3x+2$.

a) Odrediti funkciju $g(x)=ax^2+bx+c$ tako da u tački M(2,y) koja pripada grafiku ... zajedničku tačku P koja se

Primjer 1: Odrediti intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke grafika funkcije (ako ih ima):

a) $f(x) = (x+1)\ln^2(x+1)$

R: Funkcija je definisana za $x+1>0$

tj. $D_f = (-1, +\infty)$.

$$y' = \ln^2(x+1) + 2(\ln(x+1))\cdot\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) =$$

$$= \ln^2(x+1) + 2\ln(x+1)$$

$$y'' = 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x+1}(\ln(x+1)+1).$$

$$y''=0 \iff \ln(x+1)+1=0 \iff \ln(x+1)=-1$$

$$\iff x+1=e^{-1}$$

$$\iff x=-1+\frac{1}{e}.$$

$$y''>0 \overset{(x+1>0)}{\iff} \ln(x+1)+1>0 \iff x>-1+\frac{1}{e}$$

(Kako je $x+1>0$ to je znak drugog izvoda isti kao znak funkcije $\ln(x+1)+1$. Koristeći funkciju $\operatorname{sgn} x$ to je zapisano ovako:

$$\operatorname{sgn}(y''(x)) = \operatorname{sgn}(\ln(x+1)+1))$$

Scanned by TapScanner

x	$(-1, -1+\frac{1}{e})$	$-1+\frac{1}{e}$	$(-1+\frac{1}{e}, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	konkavna	$\frac{1}{e}$	konveksna
		P.T.	

$$y\left(-1+\frac{1}{e}\right) = \left(-1+\frac{1}{e}+1\right)\ln^2\left(-1+\frac{1}{e}+1\right) = \frac{1}{e}$$

Tačka $P\left(-1+\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ je prevojna tačka.

b) $y = x e^{\frac{x}{1-x}}$

Funkcija je definisana za $1-x \neq 0$ tj.

$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$y'' = e^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{2-x}{(1-x)^4}$$

$$y''(x) = 0 \iff 2-x = 0 \iff x = 2$$

$$y''(x) > 0 \iff (2-x) > 0 \iff x < 2$$

(Kako je $(1-x)^4 > 0$ za svako $x \in D_f$ to je
$$\operatorname{sgn}(y''(x)) = \operatorname{sgn}(2-x))$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y''	$+$	*	$+$	0	$-$
y	konveksna	*	konveksna	$2e^{-2}$	konkavna
				P.T.	

$y(2) = 2e^{\frac{2}{1-2}} = 2e^{-2}$; Prevojna tačka $P(2, 2e^{-2})$

* u tabeli znači da funkcija nije definisana u tački $x = 1$.

Scanned by TapScanner

U primjerima koji slijede za ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije koristimo sledeći postupak:

1° Naći oblast definisanosti funkcije

2° Ispitati da li je funkcija: parna, neparna.
(Parnost (neparnost) funkcije ima smisla ispitivati ako je oblast definisanosti funkcije simetrična u odnosu na tačku $x=0$ tj. ako za svako $x \in D_f$ važi da je $-x \in D_f$.
Za funkciju $y=f(x)$ kažemo da je parna ako za svako $x \in D_f$ broj $-x \in D_f$ i pri tome je $f(-x)=f(x)$. Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na Oy osu.
Za funkciju $y=f(x)$ kažemo da je neparna ako za svako $x \in D_f$ broj $-x \in D_f$ i pri tome je $f(-x)=-f(x)$.
Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak).

3° Odrediti nule funkcije i znak funkcije.

4° Ispitati ponašanje funkcije na krajevima intervala definisanosti. Odrediti asimptote (ako ih ima)

5° Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrijednosti funkcije

6° Odrediti intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke

7° Nacrtati grafik funkcije.

Scanned by TapScanner

3.2 Primjene

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$.

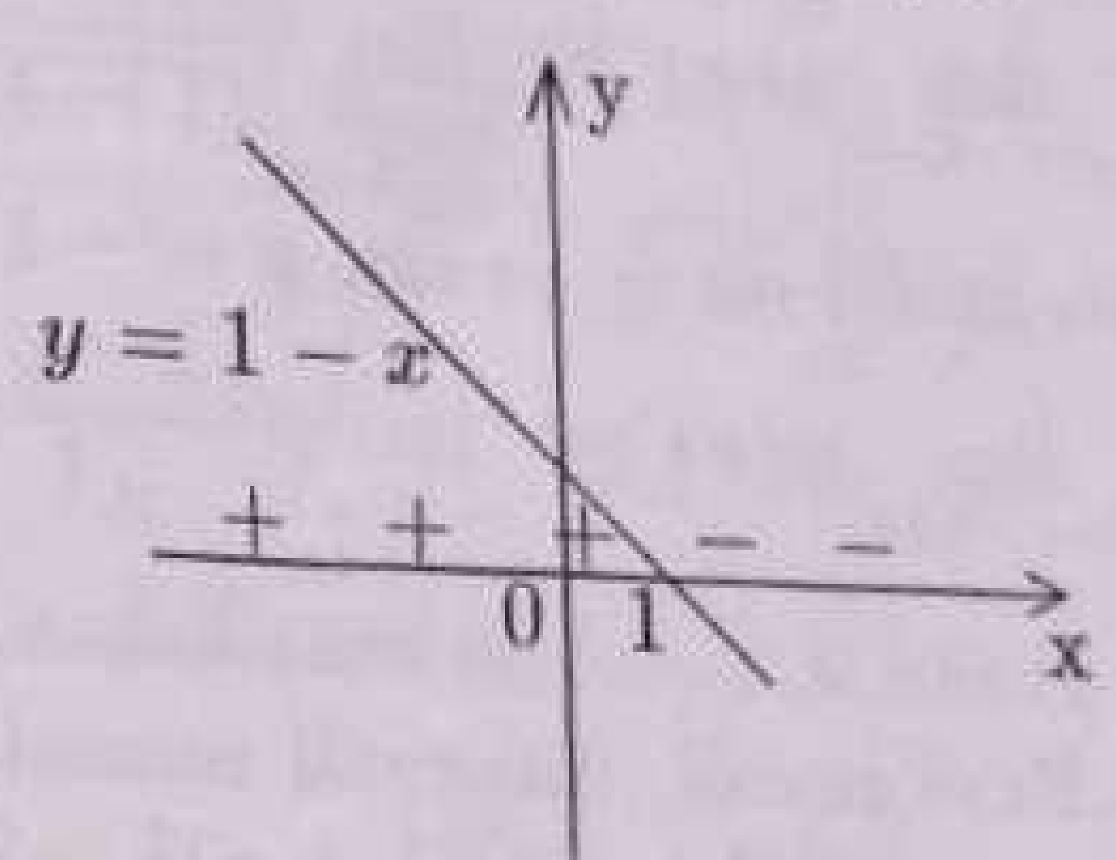
Rješenje:

1^0) Oblast definisanosti funkcije

Funkcija je definisana za one vrijednosti od x za koje je $1+x \neq 0$, tj. $x \neq -1$.
Dakle, $\mathcal{D}(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2^0) Nule i znak funkcije [1]

$y(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(y) \wedge (1-x)^3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ (nula trećeg reda).
Uočimo da je $\text{sgn}(y(x)) = \text{sgn}(1-x)$,
pa imamo



x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$+$	*	$+$	0	$-$

3^0) Ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti - asimptote

Iz $\mathcal{D}(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ vidimo da imamo četiri "kraja" oblasti definisanosti, a to su $-\infty, -1-0$ (tj. -1 s lijeve strane), $-1+0$ (tj. -1 s desne strane), $+\infty$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)^3}{(1+x)^2} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} =$

$\displaystyle= -\lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$ (pa ima smisla ispitivati postoji li kosa asimptota).

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = -1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} + x \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 5.$$

Dakle, $y = kx + n$, tj. $y = -x + 5$ je kosa asimptota (kada $x \to -\infty$).

---

[1] Radi preglednosti sve podatke ćemo unositi u tabelu. Oznaka $+(-)$ znači da je u datom intervalu funkcija pozitivna (negativna), npr. iz date tabele vidimo da je $y(x) < 0$ za $x \in (1, +\infty)$. * znači - funkcija nije definisana.

Scanned by TapScanner

$$b) \text{ Slično, } \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = -1, n = \lim_{x\to+\infty}(y(x)+x) = 5,$$

pa je prava $y = -x+5$ kosa asimptota kada $x \to +\infty$.

$$c) \lim_{x\to-1-0} y(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to0+ \\ x=-1-\varepsilon}} \frac{(1+1+\varepsilon)^3}{(1-1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to0+} \frac{(2+\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} = +\infty.$$

Ovo znači da je prava $x = -1$ vertikalna asimptota kada $x \to -1-0$.

$$d) \lim_{x\to-1+0} y(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to0+ \\ x=-1+\varepsilon}} \frac{(2-\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} = +\infty,$$

tj. prava $x = -1$ je vertikalna asimptota kada $x \to -1+0$.

4^0) Prvi izvod, intervali monotonosti i ekstremne vrijednosti funkcije

$$y'(x) = \frac{-3(1-x)^2(1+x)^2 - 2(1+x)(1-x)^3}{(1+x)^4} =$$

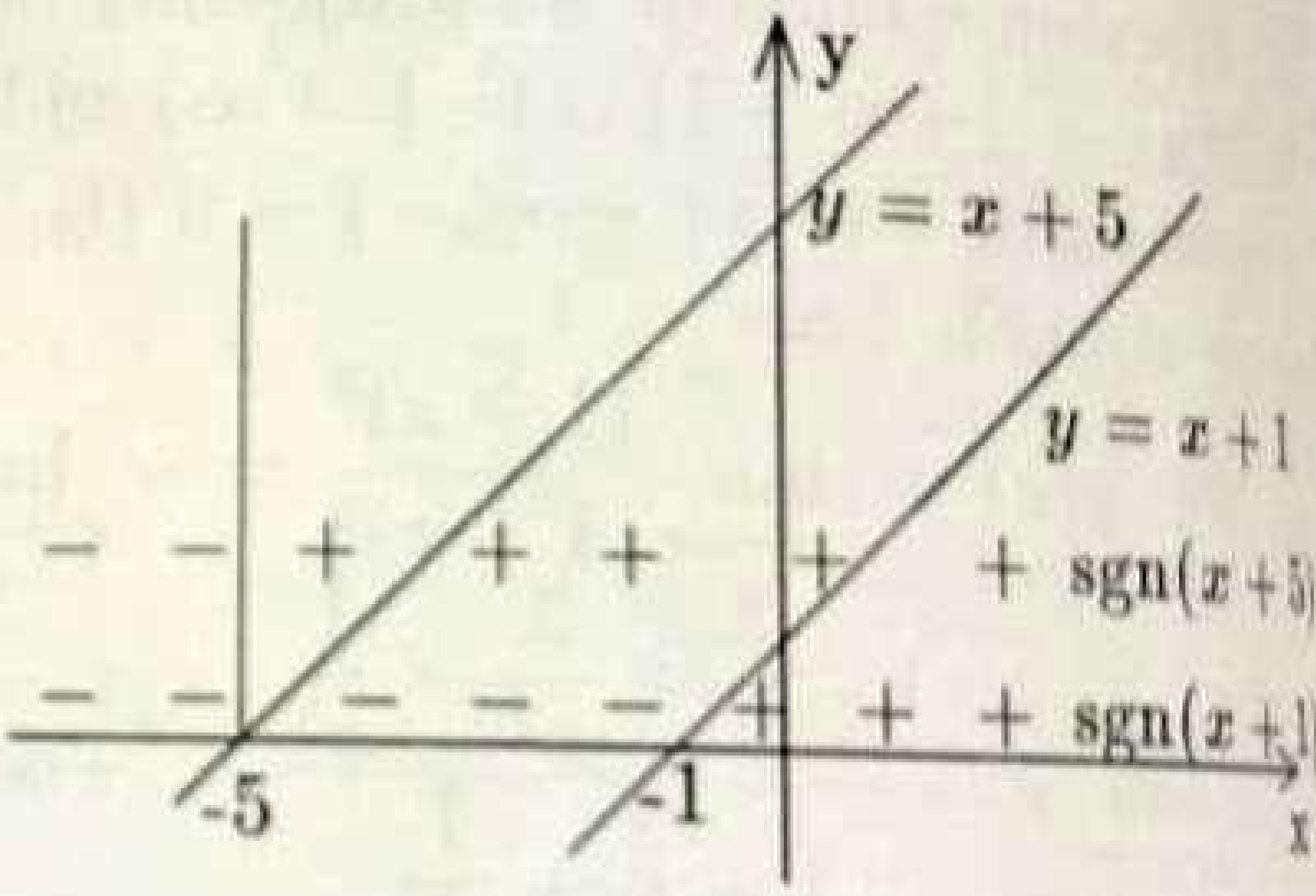
$$= \frac{-(1-x)^2(3+3x+2-2x)}{(1+x)^3} =$$

$$= -\frac{(x+5)(1-x)^2}{(1+x)^3}$$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = -5 \vee x = 1$

($x = 1$ dvostuka nula).

$\operatorname{sgn}(y'(x)) = -\operatorname{sgn}(x+5)\operatorname{sgn}(1+x)$



x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$*$	$-$	0	$-$
y	$+$	$\frac{27}{2}$	$+$	$*$	$+$	0	$-$
	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$*$	$\searrow$		$\searrow$ [2]

5^0) Drugi izvod, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost funkcije

$$y''(x) = -\frac{(1+x)^3[(1-x)^2 - 2(1-x)(x+5)] - 3(1+x)^2(x+5)(1-x)^2}{(1+x)^6} =$$

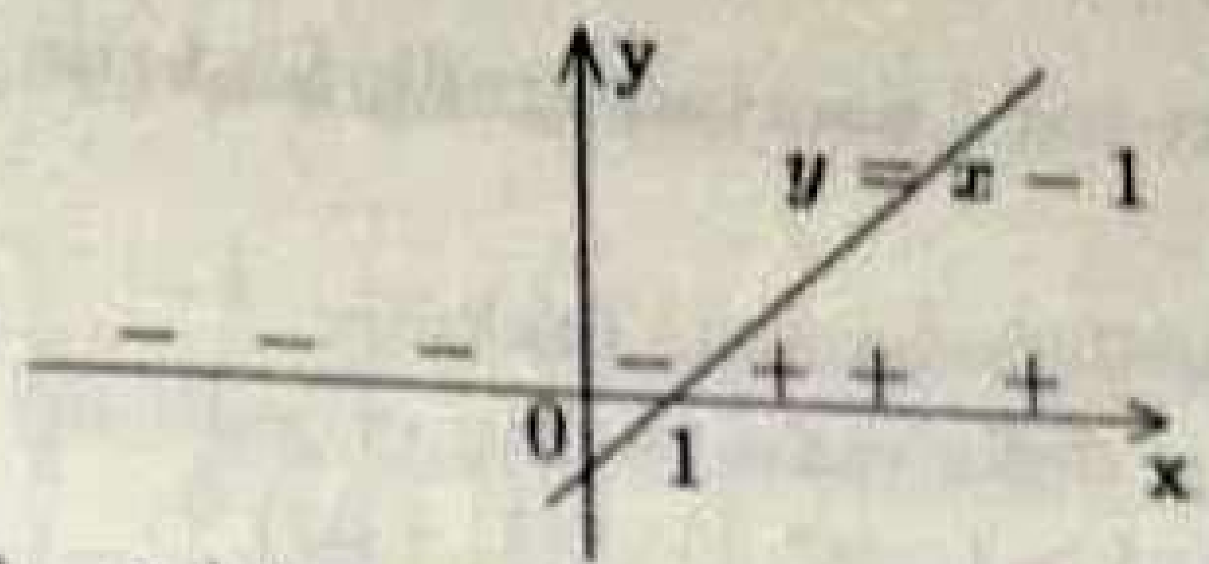
[2]Oznaka $\nearrow$ ($\searrow$) znači da funkcija u datom intervalu raste (opada), a oznaka MAX (MIN) znači da funkcija dostiže maksimum (minimum) u datoj tački. Ovo popunjavamo na osnovu znaka prvog izvoda.

Scanned by TapScanner

$$= \frac{-24(x-1)}{(x+1)^4}$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

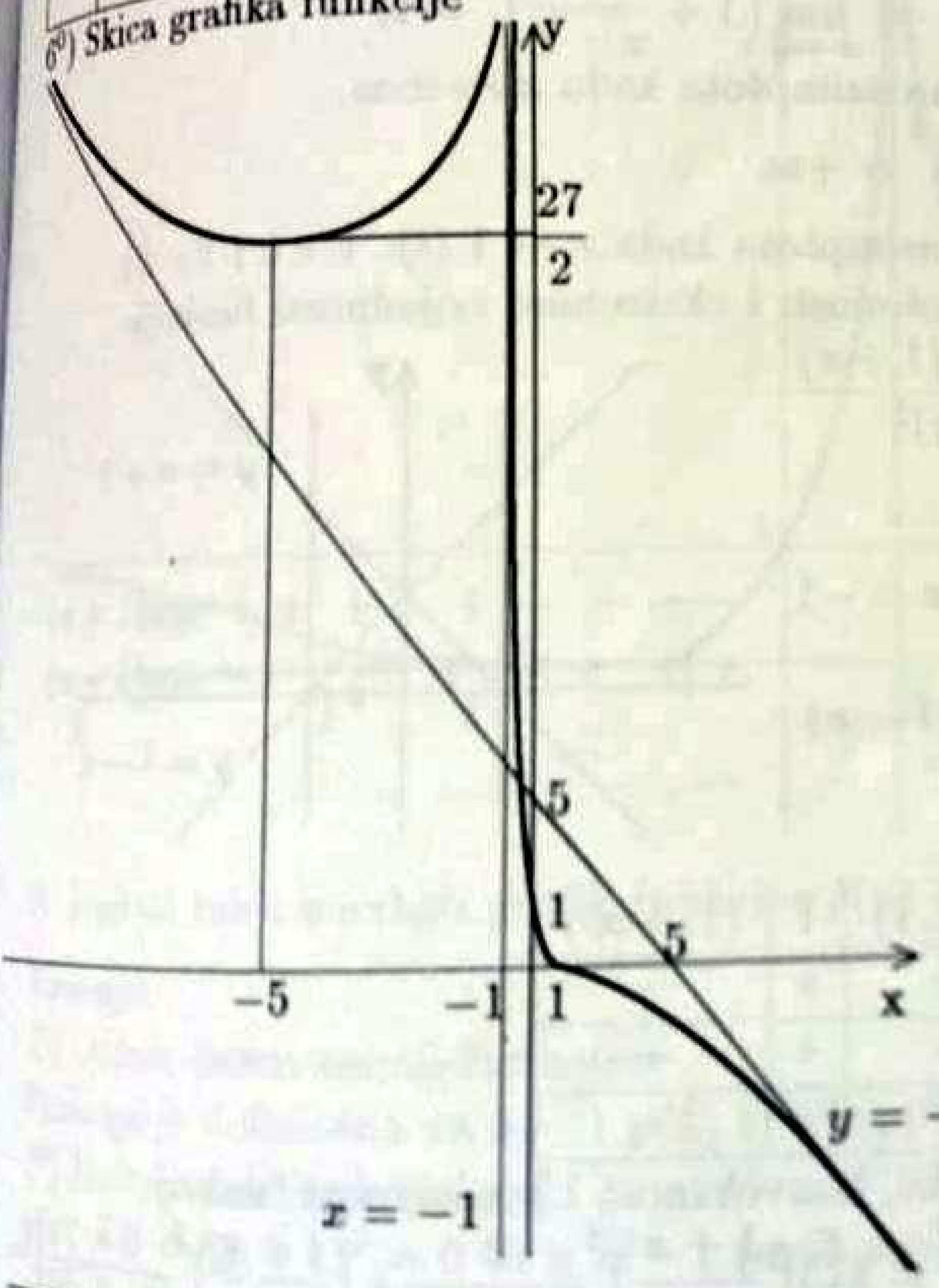
$$\mathrm{sgn}(y''(x)) = -\mathrm{sgn}(x-1)$$



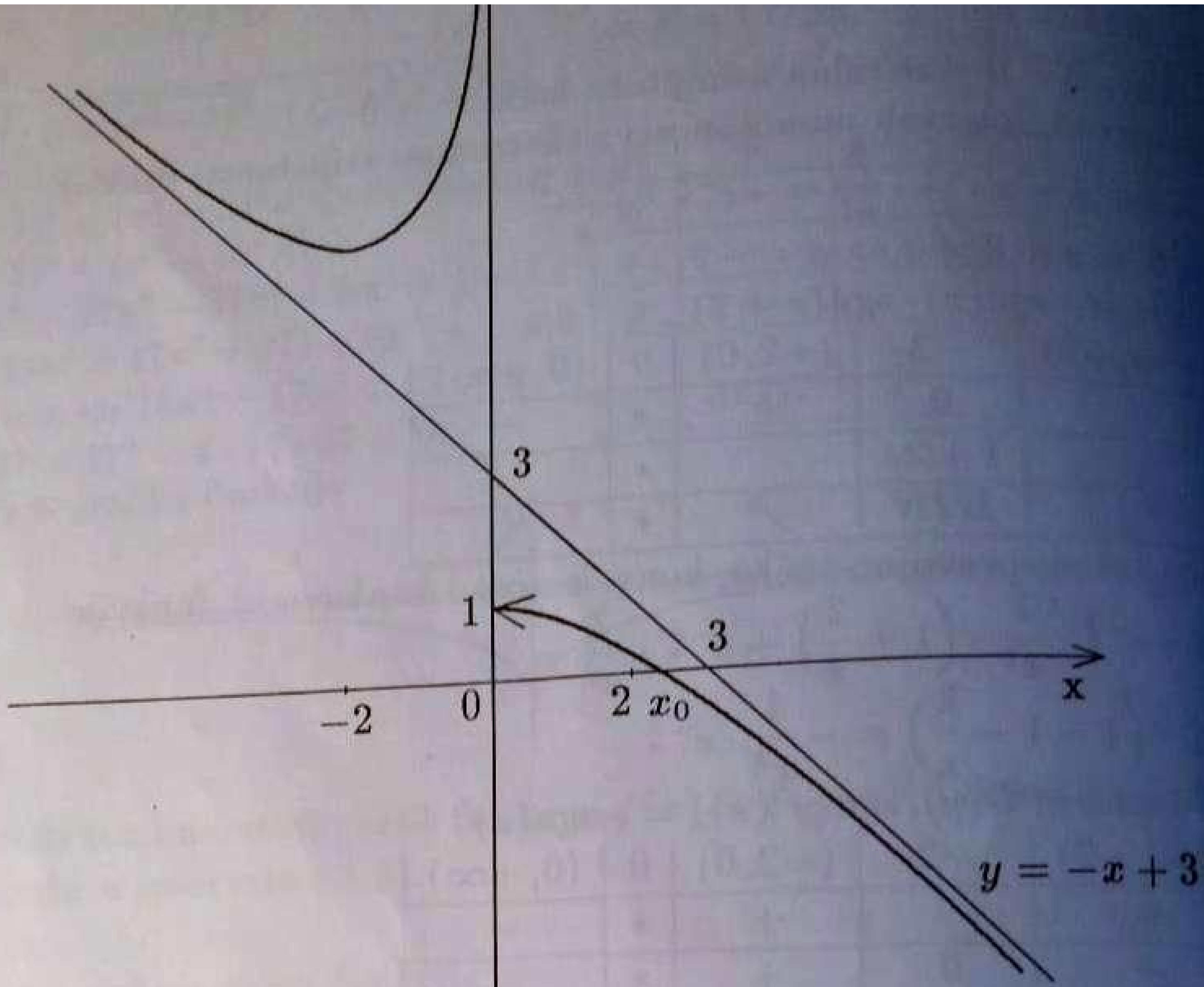
x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	+	+	*	+	0	−
y'	−	0	+	*	+	0	−
y	+	$\frac{27}{2}$	+	*	+	0	−
		MIN		*		*P.T.*	

[3]

6°) Skica grafika funkcije



[3]Oznaka znači da je funkcija konkavna i opada u datom intervalu; slično ostale oznake. Oznaka P.T. znači da je data tačka prevojna tačka funkcije.



10. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = xe^{\frac{x}{1-x}}$.

Rješenje:

1^0) Oblast definisanosti funkcije

Funkcija je definisana za $1 - x \neq 0$, tj. $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2^0) Nule i znak funkcije

$y(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\mathrm{sgn}(y(x)) = \mathrm{sgn}(x)$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$-$	0	$+$	$*$	$+$

3^0) Ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti - asimptote

$a)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{1-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}} = -\infty;$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left[y(x) - \frac{1}{e}x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e}(e^{\frac{x}{1-x}+1} - 1) =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1-x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{1}{1-x}} = -\frac{1}{e}$$

pa je $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$ kosa asimptota kada $x \to -\infty$.

b) Slično, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}} = +\infty$,

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{e}, n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(y(x) - \frac{1}{e}x \right) = -\frac{1}{e}$,

pa je prava $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$ kosa asimptota kada $x \to +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 1-} y(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x e^{\frac{x}{1-x}} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ x = 1-\varepsilon}} (1-\varepsilon) e^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} = +\infty$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota kada $x \to 1-$.

d) $\lim\limits_{x \to 1+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1+} x e^{\frac{x}{1-x}} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ x = 1+\varepsilon}} (1+\varepsilon) e^{\frac{1+\varepsilon}{-\varepsilon}} = 0+$.

4^0) Prvi izvod, intervali monotonosti i ekstremne vrijednosti funkcije

$$y'(x) = e^{\frac{x}{1-x}} + e^{\frac{x}{1-x}} \cdot x \cdot \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = e^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2} =$$

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1 - x + x^2}{(1-x)^2}.$$

Kako je $D = 1^2 - 4 < 0$, to je $x^2 - x + 1 > 0$, pa je $y'(x) > 0$ za svako $x \in \mathcal{D}(y)$ tj. funkcija je strogo rastuća u svakom intervalu oblasti definisanosti.

5^0) Drugi izvod, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost funkcije

$$y''(x) = e^{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{1-x+x}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2} + \frac{(2x-1)(1-x)^2 + 2(1-x)(1-x+x^2)}{(1-x)^4} \right) =$$

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{2-x}{(1-x)^4}.$$

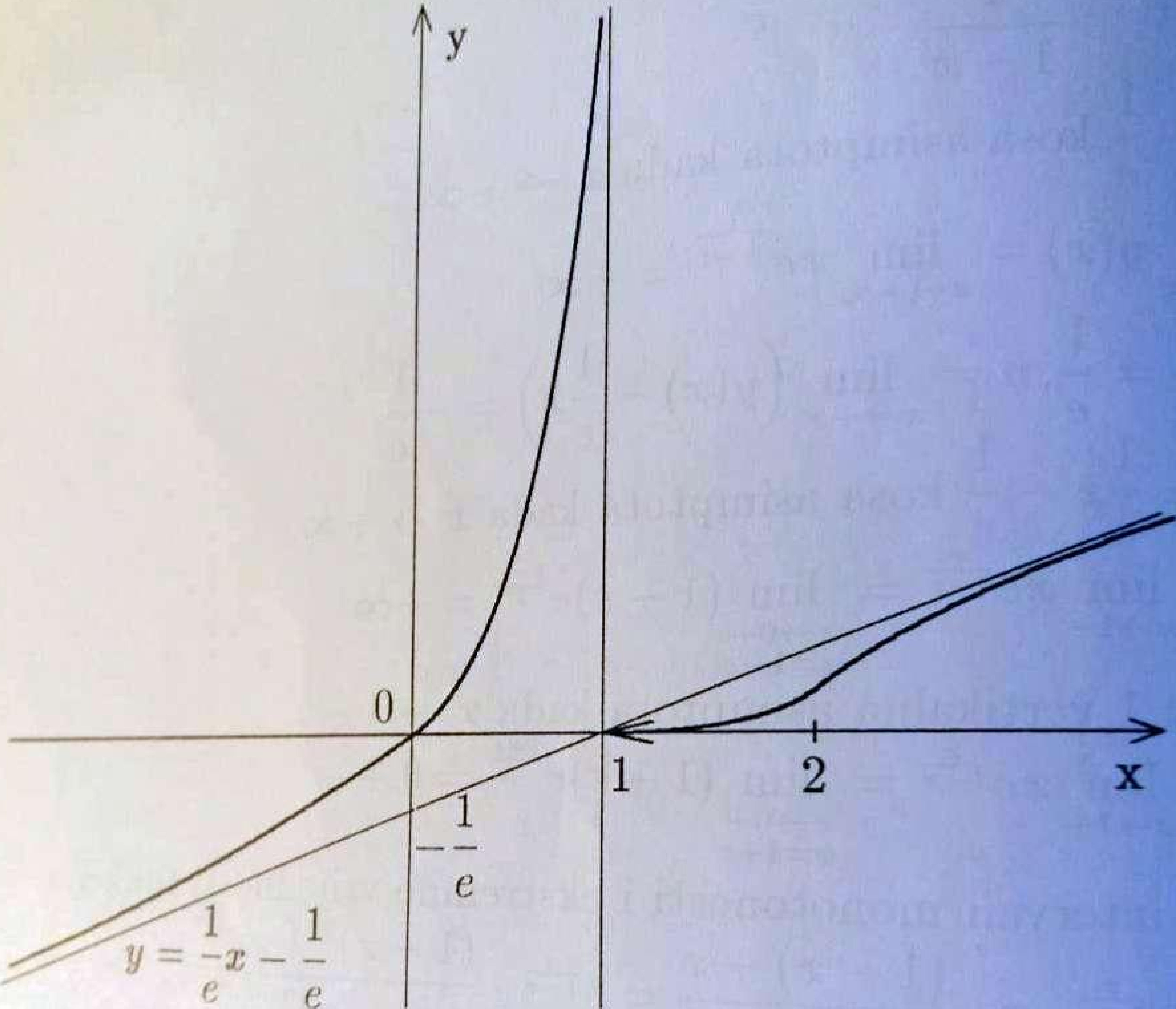
$y''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

$\operatorname{sgn}(y''(x)) = \operatorname{sgn}(2-x)$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	$+$		$+$	$*$	$+$	0	$-$
y'	$+$	$+$	$+$	$*$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	0	$+$	$*$	$+$	$\frac{2}{e^2}$	$+$
				$*$		$P.T.$	

6^0) Skica grafika funkcije

Scanned by TapScanner



11. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

Rješenje:

1^0) Oblast definisanosti funkcije

Funkcija je definisana za $2-x \neq 0$, tj. $x \neq 2$, pa je $\mathcal{D}(y) = (-\infty$

2^0) Nule i znak funkcije

$y(x) \neq 0$ za $x \in \mathcal{D}(y)$.

$\operatorname{sgn}(y(x)) = \operatorname{sgn}(2-x)$

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty$
y	$+$		

3^0) Ponašanje funkcije na kra...

$a)$ $\lim$ ...